Issue XXVIII: Categories with Families

Максим Сохацький [1]

[1] Національний технічний університет України
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського

22 квітня 2025 р.

Анотація

Категорійна семантика залежної теорії типів.

Ключові слова: теорія категорій, категорії з сім'ями, залежна теорія типів

Зміст

1 Категорії з сім'ями

Тут подано короткий неформальний опис категорійної семантики залежної теорії типів, запропонований Пітером Диб'єром. Категоріальна абстрактна машина Диб'єра на Haskell описана тут[1].

1.1 Основні визначення

Визначення 1.1 (Fam)**.** Категорія Fam — це категорія сімей множин, де об'єкти є залежними функціональними просторами $(x : A) \to B(x)$, а морфізми з доменом $\Pi(A, B)$ і кодоменом $\Pi(A', B')$ — це пари функцій $\langle f : A \to A', g(x : A) : B(x) \to B'(f(x))\rangle$.

Визначення 1.2 (Π-похідність)**.** Для контексту Γ і типу A позначимо $\Gamma \vdash A = (\gamma : \Gamma) \to A(\gamma)$.

Визначення 1.3 (Σ-охоплення)**.** Для контексту Γ і типу A маємо $\Gamma; A = (\gamma : \Gamma) * A(\gamma)$. Охоплення не є асоціативним:

$$\Gamma; A; B \neq \Gamma; B; A$$

Визначення 1.4 (Контекст)**.** Категорія контекстів C — це категорія, де об'єкти є контекстами, а морфізми — підстановками. Термінальний об'єкт $\Gamma = 0$ у C називається порожнім контекстом. Операція охоплення контексту $\Gamma; A = (x : \Gamma) * A(x)$ має елімінатори: $p : \Gamma; A \vdash \Gamma$, $q : \Gamma; A \vdash A(p)$, що задовольняють універсальну властивість: для будь-якого $\Delta : ob(C)$, морфізму $\gamma : \Delta \to \Gamma$ і терму $a : \Delta \to A$ існує єдиний морфізм $\theta = \langle \gamma, a \rangle : \Delta \to \Gamma; A$, такий що $p \circ \theta = \gamma$ і $q(\theta) = a$. Твердження: підстановка є асоціативною:

$$\gamma(\gamma(\Gamma, x, a), y, b) = \gamma(\gamma(\Gamma, y, b), x, a)$$

Визначення 1.5 (CwF-об'єкт)**.** CwF-об'єкт — це пара $\Sigma(C, C \to Fam)$, де C — категорія контекстів з об'єктами-контекстами та морфізмами-підстановками, а $T : C \to Fam$ — функтор, який відображає контекст Γ у C на сім'ю множин термів $\Gamma \vdash A$, а підстановку $\gamma : \Delta \to \Gamma$ — на пару функцій, що виконують підстановку γ у термах і типах відповідно.

Визначення 1.6 (CwF-морфізм)**.** Нехай $(C, T) : ob(C)$, де $T : C \to Fam$. CwF-морфізм $m : (C, T) \to (C', T')$ — це пара $\langle F : C \to C', \sigma : T \to T'(F)\rangle$, де F — функтор, а σ — натуральна трансформація.

Визначення 1.7 (Категорія типів)**.** Для CwF з об'єктами (C, T) і морфізмами $(C, T) \to (C', T')$, для заданого контексту $\Gamma \in Ob(C)$ можна побудувати категорію $Type(\Gamma)$ — категорію типів у контексті Γ, де об'єкти — множина типів у контексті, а морфізми — функції $f : \Gamma; A \to B(p)$.

[1] `https://www.cse.chalmers.se/~peterd/papers/Ise2008.pdf`

1.2 Семантика залежної теорії типів

Визначення 1.8 (Терми та типи)**.** У CwF для контексту Γ терми $\Gamma \vdash a : A$ є елементами множини $A(\gamma)$, де $\gamma : \Gamma$. Типи $\Gamma \vdash A$ є об'єктами в $Type(\Gamma)$, а підстановка $\gamma : \Delta \to \Gamma$ діє на типи та терми через функтор T.

Теорема 1.1 (Композиція підстановок)**.** Підстановки в категорії контекстів C є асоціативними та мають одиницю (ідентичну підстановку). Формально, для $\gamma : \Delta \to \Gamma$, $\delta : \Theta \to \Delta$ і $\epsilon : \Gamma \to \Lambda$ виконується:

$$(\gamma \circ \delta) \circ \epsilon = \gamma \circ (\delta \circ \epsilon), \quad id_\Gamma \circ \gamma = \gamma, \quad \gamma \circ id_\Delta = \gamma.$$

Доведення. Асоціативність випливає з універсальної властивості охоплення контексту (Визначення 1.4). Для будь-яких γ, δ, ϵ композиція морфізмів у C відповідає послідовному застосуванню підстановок, що зберігає структуру контекстів. Ідентична підстановка id_Γ діє як нейтральний елемент, оскільки $p \circ id_\Gamma = id_\Gamma$ і $q(id_\Gamma) = q$. □

Визначення 1.9 (Залежні типи)**.** Залежний тип у контексті Γ — це відображення $\Gamma \to Fam$, де для кожного $\gamma : \Gamma$ задається множина $A(\gamma)$. У категорії $Type(\Gamma)$ залежні типи є об'єктами, а морфізми між A і B — це функції $f : \Gamma; A \to B(p)$, що зберігають структуру підстановок.

Теорема 1.2 (Універсальна властивість залежних типів)**.** Для будь-якого контексту Γ, типу A і терму $a : \Gamma \vdash A$ існує унікальний морфізм $\theta : \Gamma \to \Gamma; A$, який задовольняє $p \circ \theta = id_\Gamma$ і $q(\theta) = a$. Це забезпечує коректність залежної типізації в CwF.

Доведення. За Визначенням 1.4, універсальна властивість охоплення контексту гарантує існування $\theta = \langle id_\Gamma, a \rangle$. Унікальність випливає з того, що будь-який інший морфізм θ' з тими ж властивостями ($p \circ \theta' = id_\Gamma$, $q(\theta') = a$) збігається з θ через єдиність композиції в C. □

1.3 Формалізація в Anders

Для формалізації CwF у Agda чи Lean необхідно визначити категорію C як запис із полями для об'єктів, морфізмів, композиції та ідентичності, а також функтор $T : C \to Fam$. Нижче наведено псевдокод для Anders[2]:

```
def algebra : U₁ := Σ
    -- a semicategory of contexts and substitutions:
    (Con: U)
    (Sub: Con → Con → U)
    (◊: Π (Γ Θ Δ : Con), Sub Θ Δ → Sub Γ Θ → Sub Γ Δ)
    (◊-assoc: Π (Γ Θ Δ Φ : Con) (σ: Sub Γ Θ) (δ: Sub Θ Δ)
        (ν: Sub Δ Φ), PathP (<_> Sub Γ Φ) (◊ Γ Δ Φ ν (◊ Γ Θ Δ δ σ))
                                           (◊ Γ Θ Φ (◊ Θ Δ Φ ν δ) σ))
    -- identity morphisms as identity substitutions:
    (id: Π (Γ : Con), Sub Γ Γ)
    (id-left: Π (Θ Δ : Con) (δ : Sub Θ Δ),
              Path (Sub Θ Δ) δ (◊ Θ Δ Δ (id Δ) δ))
    (id-right: Π (Θ Δ : Con) (δ : Sub Θ Δ),
               Path (Sub Θ Δ) δ (◊ Θ Θ Δ δ (id Θ)))
    -- a terminal oject as empty context:
    (•: Con)
    (ε: Π (Γ : Con), Sub Γ •)
    (•-η: Π (Γ: Con) (δ: Sub Γ •), Path (Sub Γ •) (ε Γ) δ)
    (Ty: Con → U)
    (_|_|^T: Π (Γ Δ : Con), Ty Δ → Sub Γ Δ → Ty Γ)
    (|id|^T: Π (Δ : Con) (A : Ty Δ), Path (Ty Δ) (_|_|^T Δ Δ A (id Δ)) A)
    (|◊|^T: Π (Γ Δ Φ: Con) (A : Ty Φ) (σ : Sub Γ Δ) (δ : Sub Δ Φ),
        PathP (<_> Ty Γ) (_|_|^T Γ Φ A (◊ Γ Δ Φ δ σ))
                         (_|_|^T Γ Δ (_|_|^T Δ Φ A δ) σ))
    -- a (covariant) presheaf on the category of elements as terms:
    (Tm: Π (Γ : Con), Ty Γ → U)
    (_|_|^t: Π (Γ Δ : Con) (A : Ty Δ) (B : Tm Δ A)
              (σ: Sub Γ Δ), Tm Γ (_|_|^T Γ Δ A σ))
    (|id|^t: Π (Δ : Con) (A : Ty Δ) (t: Tm Δ A),
            PathP (<i> Tm Δ (|id|^T Δ A @ i))
                  (_|_|^t Δ Δ A t (id Δ)) t)
    (|◊|^t: Π (Γ Δ Φ: Con) (A : Ty Φ) (t: Tm Φ A)
             (σ : Sub Γ Δ) (δ : Sub Δ Φ),
             PathP (<i> Tm Γ (|◊|^T Γ Δ Φ A σ δ @ i))
                   (_|_|^t Γ Φ A t (◊ Γ Δ Φ δ σ))
          (_|_|^t Γ Δ (_|_|^T Δ Φ A δ) (_|_|^t Δ Φ A t δ) σ))
```

Ця структура дозволяє реалізувати Визначення 1.1–1.11, а Теореми 1.10 і 1.12 доводяться через перевірку асоціативності та універсальних властивостей.

[2] https://anders.groupoid.space/lib/mathematics/categories/meta/kraus.anders

1.4 Висновки

Категорії з сім'ями (CwF) є потужним інструментом для моделювання залежної теорії типів. Вони забезпечують чітку семантику для контекстів, підстановок і залежних типів, що полегшує аналіз і формалізацію.