Issue XXXVII: Homotopical Dynamics

Namdak Tonpa

26 квітня 2026 р.

Анотація

У цій роботі розвивається концепція *гомотопічної динаміки* — ієрархічного категоріально-гомотопічного підходу до опису станів і еволюцій фізичних та інженерних систем. Тут озглядається «драбина станів» як функторіальний ланцюг від ∞-групоїдів і когезивної гомотопічної теорії типів через класичну ймовірність, марковські процеси та нелінійні напівгрупи до гільбертових просторів і квантової механіки.

Особлива увага приділяється синтетичній інтерпретації нелінійної динаміки за допомогою вищих індуктивних типів, та спряжених когезивних модальностей у когезивних ∞-топосах. Показано, що нелінійні частинні диференціальні рівняння, які виникають у самоузгодженому наближенні, mean-field theory (MFT), моделей роїв (Cucker–Smale, Vicsek, Alignment-Attraction-Avoidance), природно описуються в цьому фреймворку.

Як приклад практичного застосування розглядається колективна поведінка великих роїв дронів та мурмурацій. Гомотопічна динаміка інтегрується з протоколом Link32/Skynet, що забезпечує низьколатентну комунікацію та керування роєм до 5000 агентів. Це дозволяє синтетично моделювати виникаючу поведінку, верифікувати стійкість колективних маневрів і здійснювати функторіальну лінеаризацію нелінійних взаємодій у гільбертових просторах.

Робота пропонує погляд, у якому гомотопічні, стохастичні, нелінійні та квантові еволюції описуються через універсальні конструкції теорії категорій у когезивних ∞-топосах, з безпосереднім застосуванням до сучасних автономних систем.

Keywords: Гомотопічна динаміка, нелінійні системи, теорія розподілів, стохастичні еволюції, квантові еволюції, L^2 простори, квантова механіка, оснащений Гільбертів простір.

Зміст

1 Homotopical Dynamics

Стан як об'єкт, еволюція як морфізм

У рамках підходу *Groupoid Infinity* математика розглядається як єдина суверенна система, в якій фізичні та ймовірнісні структури моделюються як об'єкти у відповідних ∞-категоріях, а динамічні процеси — як морфізми (1-морфізми у вищому сенсі).

«Драбина станів» від L^2-просторів до квантової механіки не є простою послідовністю прикладів. Це **функторіальна драбина** — ланцюг функторів між категоріями, де кожен щабель відповідає переходу між різними типами просторів станів та їх еволюціями.

Ми формалізуємо базовий принцип:

- **Стан** — це узагальнений елемент простору (морфізм $1 \to X$);
- **Еволюція** — це оператор (морфізм або ендофунктор).

Різні фізичні теорії виникають як різні класи просторів і дозволених морфізмів. У HoTT/L^2 стає об'єктом у †-категорії **Hilb**, марковські процеси породжують монаду ймовірності на категорії вимірних просторів, а самі процеси реалізуються як морфізми у відповідній Kleisli-категорії. Квантова механіка постає як синтез у dagger-структурі.

Нижче ми крок за кроком піднімаємося драбиною, а в кінці наводимо категоріальну діаграму переходів.

1.1 Мова зліченновимірних станів

Функціональний аналіз є базовою мовою для роботи з Banach- і Hilbert-просторами. Центральним об'єктом є гільбертів простір $L^2(X, \mu)$ квадратно-інтегровних функцій з внутрішнім добутком

$$\langle f \mid g \rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x).$$

Кожен елемент $\psi \in L^2(X, \mu)$ уже інтерпретується як **вектор стану**. Обмежені оператори є ендоморфізмами, а часова еволюція описується сильною неперервною напівгрупою операторів на L^p-просторах (зокрема на L^2 за умов інваріантності міри).

L^2-простори природно утворюють †-категорію **Hilb** (категорію гільбертових просторів з обмеженими операторами та інволюцією †, що відповідає спряженому оператору).

1.2 Оснащений Гільбертів простір як узагальнення

Звичайні L^2-функції недостатні для опису δ-функцій Дірака, власних функцій неперервного спектру чи сингулярних розв'язків диференціальних рівнянь. Теорія розподілів Шварца вводить **rigged Hilbert space** (трійку Гельфанда):

$$\mathcal{S} \subset \mathsf{L}^2 \subset \mathcal{S}',$$

де $\mathcal{S}$ — ядерний простір тест-функцій (простір Шварца), а $\mathcal{S}'$ — простір розподілів (його топологічний дуал).

У категоріальній мові розподіли можна розглядати як узагальнені елементи подвійного об'єкта, що узгоджується з ідеєю generalized elements у сенсі Гротендіка. Саме в $\mathcal{S}'$ «живуть» плоскі хвилі та інші сингулярні об'єкти, необхідні для спектральної теорії.

Rigged Hilbert space є першим кроком до **cohesive modalities** у синтетичній диференціальній геометрії: розподіли поводяться як «інфінітезимальні» або «проінфінітні» елементи.

1.3 L^2 як простір ймовірностей

У теорії ймовірностей випадкова величина $\mathsf{X} \in \mathsf{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ задовольняє

$$\|\mathsf{X}\|_2^2 = \mathbb{E}[\mathsf{X}^2].$$

Ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ індукує гільбертів простір $\mathsf{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$, в якому умовне сподівання $\mathbb{E}[\,\cdot \mid \mathcal{G}]$ є ортогональною проєкцією на підпростір $\mathsf{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.

Незалежність σ-алгебр імплікує ортогональність відповідних центрованих підпросторів у L^2, хоча й не зводиться до неї повністю. Таким чином, значна частина класичної теорії ймовірностей має природну інтерпретацію в термінах функціонального аналізу.

Категоріально ймовірнісна міра відповідає стану (positive normalized functional) на комутативній C^*-алгебрі $\mathsf{L}^\infty(\Omega)$.

1.4 Категорії Маркова

Ймовірнісна динаміка природно організовується на рівні категорії процесів. Нехай $\mathbf{Meas}$ — категорія вимірних просторів. Монада Гірі ймовірнісних розподілів

$$\mathcal{G} : \mathbf{Meas} \to \mathbf{Meas}$$

індукує Kleisli-категорію $\mathbf{Kl}(\mathcal{G})$, яку ми позначаємо $\mathbf{Markov}$.

У категорії $\mathbf{Markov}$:

- об'єкти — вимірні простори;
- морфізми $X \to Y$ — марковські ядра $X \to \mathcal{G}(Y)$;
- стани — морфізми $1 \to X$;
- еволюції — морфізми $X \to Y$.

Умовна ймовірність і правило Байєса набувають природної категоріальної інтерпретації через універсальні властивості (заповнення діаграм).

У категорії $\mathbf{Markov}$ (Kleisli-категорії монади Гірі) умовна ймовірність і правило Байєса набувають природної категоріальної інтерпретації через **універсальні властивості** заповнення діаграм.

Зокрема, якщо ми маємо спільний розподіл, заданий морфізмом $p : A \to X \otimes Y$ (де $\otimes$ позначає копродукт у категорії, що відповідає незалежному тензорному добутку), то **умовна ймовірність** $p(\cdot \mid x)$ є морфізмом, який робить наступну діаграму комутативною:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\text{discard on } Y"'] & X \otimes Y \arrow[d, "\text{projection on } X"] \\
X \arrow[r, equal] & X
\end{tikzcd}$$

Більш точно, у Markov-категоріях з умовними розподілами (categories with conditionals) існування умовного ймовірності відповідає існуванню певного морфізму $p_{Y|X} : X \to Y$, що задовольняє універсальну властивість: для будь-якого тесту або спостереження умовне сподівання/ймовірність виражається через композицію в категорії.

Правило Байєса в цьому фреймворку набуває форми **Bayesian inversion**. Якщо задано пріорний розподіл і марковське ядро (перехідну ймовірність) $f : X \to Y$, то апостеріорний розподіл $f^\dagger$ (Bayesian update) є морфізмом, що отримується за допомогою «обернення» стрілки за допомогою копіювання (copying) і відкидання (discarding) — структур, притаманних Markov-категоріям.

У термінах string diagrams правило Байєса виглядає як природна комутація між прямим і оберненим умовним розподілом:

$$p(y \mid x) \cdot p(x) \quad \longleftrightarrow \quad p(x \mid y) \cdot p(y),$$

де обертання стрілки $(p(y \mid x) \mapsto p(x \mid y))$ у категоріях з conditionals часто має структуру dagger-подібного функтора (Bayesian inversion functor). Це дозволяє формулювати Bayesian updating повністю абстрактно, без явного звернення до формул із діленням, що особливо зручно в неперервному випадку.

Таким чином, категорія $\mathbf{Markov}$ не лише кодує стохастичну динаміку, але й надає синтетичну мову для всього байєсівського висновування, включаючи умовну незалежність, достатні статистики та Bayesian filtering (як у прихованих марковських моделях).

1.5 Марковські процеси як напівгрупи операторів

Марковський процес можна розглядати як одно-параметричну напівгрупу ендоморфізмів у $\mathbf{Markov}$: $T_t : X \to X$.

У функціональному аналізі цьому відповідає напівгрупа операторів на $L^2(X, \mu)$:

$$(T_t f)(x) = \mathbb{E}[f(X_t) \mid X_0 = x].$$

Її інфінітезимальний генератор L задовольняє рівняння Колмогорова–Чепмена.

Таким чином, марковська динаміка реалізується як контрактна додатно збереженна напівгрупа на гільбертовому просторі — структура, дуже близька до квантової механіки, але з контрактними замість унітарних операторів.

Простір траєкторій марковського процесу природно моделюється як об'єкт у ∞-категорії типів. Функтор $\Pi_\infty : \mathbf{Top} \to \infty\text{-}\mathbf{Gpd}$ піднімає топологічну модель до гомотопічної, де шляхи відповідають вищим гомотопіям.

1.6 Геометризація фазового простору

У класичній механіці фазовий простір $M = T^*Q$ оснащений симплектичною формою ω. Гамільтонів потік індукує еволюцію на алгебрі гладких функцій $C^\infty(M)$ через оператор Лі.

Перехід до $L^2(M, \mu)$ (з мірою Ліувіля) та подальше розширення до rigged Hilbert space є ключовим кроком до **geometric quantization** — природного мосту між класичною та квантовою механікою.

1.7 Нелінійні системи

Для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь $\dot{x} = F(x)$, де F — нелінійний векторне поле на фазовому просторі M, простір станів залишається тим самим (зазвичай M або його функціональний аналог $L^2(M, \mu)$), але еволюція стає **нелінійним потоком** $\Phi_t : M \to M$, що задовольняє групову властивість $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ (або напівгрупову для $t \geq 0$).

У функціональному аналізі такі системи породжують **нелінійні напівгрупи** операторів на відповідних просторах функцій (наприклад, на $C^0(M)$ або $L^p(M)$). Типовими прикладами є напівгрупи, породжені монотонними операторами, акретивними операторами або операторами типу $\mathfrak{m}$-акретивних у сенсі теорії нелінійних операторів (див. теорію Країноса–Като). Тут з'являються явища хаосу, біфуркацій, атракторів і складної динаміки, які не мають прямого аналога в лінійній теорії.

1.7.1 Категоріальна інтерпретація нелінійної динаміки

Нелінійні динамічні системи допускають природну категоріальну формалізацію. Класична дискретна динамічна система з часом, заданим напівгрупою $(T, +)$ (наприклад, $\mathbb{N}$ або $\mathbb{R}_{\geq 0}$), може бути представлена як **функтор**

$$\Phi : \mathbf{B}T \to \mathbf{C},$$

де $\mathbf{B}T$ — категорія з одним об'єктом, морфізмами якої є елементи напівгрупи T, а $\mathbf{C}$ — категорія контексту (наприклад, $\mathbf{Top}$, $\mathbf{Meas}$ або категорія гладких многовидів $\mathbf{Diff}$). Дія функтора кодує еволюцію: морфізм $t \in T$ відображається в автоморфізм $\Phi_t : X \to X$.

Категорія динамічних систем (з фіксованою напівгрупою часу) утворює **функторну категорію** $[\mathbf{B}T, \mathbf{C}]$, де морфізмами між двома системами Φ, Ψ є природні перетворення (тобто комутувальні відображення $f : X \to Y$ такі, що $f \circ \Phi_t = \Psi_t \circ f$). Це дозволяє говорити про еквівалентність, спряження та морфізми динамічних систем у строго категоріальному сенсі.

Для відкритих динамічних систем (open dynamical systems), які допускають композицію через wiring diagrams, використовується теорія поліноміальних функторів або lenses у категоріях з вибраною структурою (наприклад, у категорії поліфункторів $\mathbf{Poly}$). Це дає потужний інструмент для модульної композиції нелінійних систем.

1.7.2 Вищі індуктивні типи та гомотопічна динаміка

У Homotopy Type Theory (HoTT) нелінійні траєкторії моделюються синтетично за допомогою **higher inductive types** (HIT) — вищих індуктивних типів. Нехай M — тип фазового простору (наприклад, гладкий многовид у cohesive topos). Простір траєкторій визначається як HIT $\mathrm{Path}_\infty(M)$, згенерований: 1) конструктором точок; 2) конструкторами шляхів; 3) вищими конструкторами для репараметризації та гомотопій між потоками.

$$\mathrm{Path}_\infty(M) := \begin{cases} \mathrm{pt} : M \to \mathrm{Path}_\infty(M); \\ \mathrm{path} : \prod\limits_{x,y:M} (x = y) \to \mathrm{Path}_\infty(M); \\ \mathrm{hom} : \prod\limits_{\Phi,\Psi:I\to M} \prod\limits_{i:I} \Phi(i) = \Psi(i) \to \mathrm{Path}_\infty(M). \end{cases}$$

Формально $\mathrm{Path}_\infty(M)$ реалізує **fundamental ∞-groupoid** $\Pi_\infty(M)$ через функтор $\Pi_\infty : \mathbf{Top} \to \infty\text{-}\mathbf{Gpd}$, де 1-морфізми відповідають шляхам, а k-морфізми — гомотопіям вищого порядку між траєкторіями. Це узагальнює класичний path space до ∞-групоїда, в якому еквівалентності між різними параметризаціями потоку $\Phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathrm{Aut}(M)$ кодуються вищими гомотопіями.

Зв'язок з калібровочними полями. HoTT є основою для опису gauge fields у фізиці: gauge field A — це cocycle у twisted differential cohomology (Chern-Weil homomorphism у cohesive ∞-topos). Динаміка інтерпретується як parallel transport у configuration groupoid (space of field histories), де HIT-моделі описують homotopy між gauge-еквівалентними полями. У контексті M-theory higher structures (L_∞-алгебри) динаміка кодується morphisms у moduli ∞-stacks конфігурацій полів, де higher gauge equivalences забезпечують інваріантність відносно higher homotopies.

Таким чином, гомотопічна динаміка піднімає нелінійні напівгрупи функціонального аналізу до синтетичного рівня в cohesive ∞-topos, де всі щаблі драбини (від $\mathbf{Top}$ до $\mathbf{Quant}$) описуються єдино через universal constructions.

1.7.3 Синтетична нелінійна динаміка

У **cohesive homotopy type theory** (а особливо в її диференціально-когезивному варіанті) нелінійні динамічні системи описуються за допомогою системи спряжених конезивних модальностей **adjoint cohesive modalities**, що реалізують розрізнення дискретної, неперервної та інфінітезимальної структури типів.

Нехай $\flat$ (shape/flat modality) — idempotent comonad, що витягує підстилаючу гомотопічну інформацію, $\sharp$ (sharp modality) — відповідний monad, а $\mathfrak{R}$ (reduction) та $\mathfrak{I}$ (infinitesimal shape) — диференціальні модальності в differential cohesive ∞-topos. Ці модальності утворюють adjoint triples і quadruple, що задовольняють аксіоми cohesion (за Lawvere–Schreiber–Shulman).

Нелінійне векторне поле $\mathsf{F} : \mathsf{M} \to \mathsf{TM}$ на фазовому просторі M (тип у cohesive topos) інтерпретується як морфізм, а потік Φ_t виникає синтетично як інтегрована дія інфінітезимальних автоморфізмів. Інфінітезимальні об'єкти моделюються через модальність $\mathfrak{I}$, яка дозволяє визначати формальні диски та jet bundles без звернення до аналітичних конструкцій.

Теореми існування та єдиності розв'язків автономних звичайних диференціальних рівнянь (зокрема, теорема Пікара–Ліндельофа) набувають синтетичної форми: вони випливають з universal properties контракції в cohesive topos та idempotence модальностей, без явного використання метрики Банаха чи ліпшицевих умов у класичному сенсі. Аналогічно, нелінійні напівгрупи операторів у функціональному аналізі піднімаються до morphisms у категорії cohesive типів.

У цьому фреймворку хаотична динаміка, атрактори та біфуркації описуються гомотопічно-когезивно: атрактори відповідають фіксованим точкам (або фіксованим підтипам) під дією higher morphisms, а інваріантні множини — homotopy-coherent діаграмам у ∞-групоїді конфігурацій.

Cohesive modalities забезпечують єдиний синтетичний опис переходу від класичної нелінійної динаміки (на рівні $\mathbf{Top}$ або $\mathbf{Diff}$) до її гомотопічної та диференціальної реалізації. Вони безпосередньо готують ґрунт для переходу до квантової механіки та gauge theory: у cohesive ∞-topos gauge fields і їх динаміка (parallel transport) описуються через диференціальну когомологію (Chern-Weil homomorphism), а higher structures (L_∞-алгебри) виникають природно з moduli ∞-stacks конфігурацій полів.

Таким чином, у cohesive homotopy type theory нелінійна динаміка, її гомотопічна інтерпретація та лінеаризація до гільбертових просторів (а згодом до квантової еволюції) описуються одночасно через adjoint modalities та universal constructions у cohesive ∞-topos.

1.8 Квантова механіка

У квантовій механіці стан описується вектором $\psi \in \mathcal{H}$, спостережувані — самоспряженими операторами $A = A^\dagger$, а еволюція задається унітарною групою:

$$i\hbar\frac{d\psi}{dt} = H\psi \quad \Longrightarrow \quad U_t = e^{-iHt/\hbar}.$$

Квантова теорія синтезує попередні рівні:

- L^2 + rigged структура (спектральна теорія);
- ймовірність ($|\psi|^2$ як густина ймовірності);
- операторну динаміку (перехід від марковських до унітарних еволюцій);
- геометрію (симплектична геометрія $\to$ попередня квантизація).

1.9 Обертання Віка та формула Фейнмана–Каца

Глибокий аналітичний зв'язок між марковською та квантовою динамікою забезпечується Wick rotation ($t \mapsto -it$) та формулою Фейнмана–Каца.

Формула Фейнмана–Каца виражає розв'язок рівняння Шредінгера через умовне сподівання відносно евклідового марковського процесу. Формально це відповідає аналітичному продовженню генератора дифузії L до самоспряженого гамільтоніана H (у багатьох моделях $H \approx -L$).

У $\dagger$-категоріях цей перехід інтерпретується як перехід від позитивних контрактних напівгруп до унітарних груп, хоча канонічного функторіального підняття загалом не існує.

1.10 Категоріальна діаграма переходів

У рамках HoTT/∞-категорій драбина станів може бути представлена такою (спрощеною) комутативною діаграмою:

$$
\begin{tikzcd}
\infty\text{-}\mathsf{Gpd} \arrow[r] & \mathsf{Top} \arrow[r] & \mathsf{Meas} \arrow[d, "\mathcal{G}\ \text{(Giry)}"] & \\
 & & \mathsf{Markov} \arrow[r, "\mathcal{K}"] \arrow[d, "\text{generator } \mathrm{L}"] & \mathsf{Hilb} \arrow[d, "\text{rigging}"] \\
 & & \mathsf{Semigroup} \arrow[d, "\text{Wick / Feynman–Kac}"] & \mathsf{Quant} \\
 & & \mathsf{UnitaryGroup} &
\end{tikzcd}
$$

Додатково:

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Prob} \arrow[r, "\text{cond. exp.}"] \arrow[d, "\text{Kolmogorov}"'] & \mathsf{Hilb} \arrow[d, "\text{rigging}"] \\
\mathsf{Markov} \arrow[r, "\text{Feynman–Kac}"] \arrow[d, "\text{nonlinear}"'] & \mathsf{Quant} \arrow[d, "\text{geometric quantization}"] \\
\mathsf{NonlinearDynamics} & \mathsf{CohesiveModality}
\end{tikzcd}
$$

1.11 Функторіальна лінеаризація

Ми визначаємо композицію функторів, яка реалізує лінеаризацію гомотопічної динаміки:

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{B} \circ |-|: \infty\text{-}\mathbf{Gpd} \to \mathbf{Hilb},$$

де $\mathcal{K}$ — гільбертова реалізація марковських ядер.

На рівні марковської категорії функтор $\mathcal{K} : \mathbf{Markov} \to \mathbf{Hilb}$ діє так: - на об'єктах: $X \mapsto L^2(X, \mu)$; - на морфізмах (марковське ядро $K : X \to \mathcal{G}(Y)$):

$$(\mathcal{K}Kf)(x) = \int_Y f(y)\, K(x, dy).$$

Отриманий оператор є лінійним, позитивним і контрактним.

1.11.1 Прикладне заастосування гомотопічної динаміки

Гомотопічна динаміка в cohesive ∞-topos природно застосовується до нелінійних моделей великих роїв дронів (drone swarms) та явищ типу *murmuration* (узгоджене колективне маневрування, подібне до зграї шпаків). Такі системи описуються мікроскопічними нелінійними звичайними диференціальними рівняннями (ODE) для окремих агентів та їх континуальним mean-field наближенням у формі частинних диференціальних рівнянь (PDE).

Ключовим прикладом є **Cucker–Smale модель** (та її узагальнення Vicsek, Alignment-Attraction-Avoidance), де динаміка швидкостей агентів задається нелінійним вирівнюванням:

$$\dot{v}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \phi(\|x_i - x_j\|)(v_j - v_i) + u_i,$$

з комунікаційною функцією ϕ (затухання з відстанню) та зовнішнім керуванням u_i. У mean-field limit ($N \to \infty$) система переходить у континуальне PDE для густини $\rho(t, x)$ та поля швидкостей $v(t, x)$:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \qquad \partial_t(\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) = \nabla \cdot (\rho \sigma) + \rho u,$$

де σ — нелінійний тензор напруг, що виникає від локальних взаємодій. Такі рівняння належать до hyperbolic або parabolic типу і моделюють emergent behaviors: флокінг, мурмурацію, уникнення зіткнень та адаптивне формування.

У рамках **cohesive homotopy type theory** фазовий простір конфігурацій рою моделюється як тип M у cohesive ∞-topos. Простір траєкторій рою є higher inductive type $\mathrm{Path}_\infty(M^N)$ (або його mean-field версія на просторі мір). Higher гомотопії кодують деформації колективних маневрів, репараметризацію та gauge-еквівалентності під дією локальних комунікаційних топологій (proximity graphs). Adjoint cohesive modalities ($\flat \dashv \sharp$, $\mathfrak{R} \dashv \mathfrak{I}$) дозволяють синтетично розрізняти мікроскопічний (дискретний) і макроскопічний (континуальний) рівні, а також інфінітезимальні варіації керування.

Functorial linearization $\mathcal{L} : \infty\text{-}\mathbf{Gpd} \to \mathbf{Hilb}$ (через Giry-монаду та гільбертову реалізацію) переводить нелінійні взаємодії рою у операторну динаміку на $L^2(\rho)$ або Sobolev просторах, з Green functions як ядрами інтегральних операторів. Це узгоджується з rigged Hilbert space для розподілених керувань і спектральним аналізом колективних мод.

Застосування до продукту Skynet. Протокол Link32/Skynet реалізує комунікаційний шар (cluster hybrid topology, dynamic TDMA, низьколатентний C2) для роїв до 5000 дронів. Control inputs u_i надходять саме через Skynet (QoS-диференційовані повідомлення для позицій, команд і стану). У гомотопічній моделі комунікаційна топологія рою інтерпретується як simplicial структура на конфігураційному просторі, а higher morphisms забезпечують стійкість до переривань зв'язку (homotopy-coherent consensus). Mean-field PDE з керуванням від Skynet описує еволюцію густини рою, дозволяючи синтетично перевіряти властивості emergent behavior (наприклад, глобальну узгодженість мурмурації) через universal properties у cohesive ∞-topos.

Таким чином, гомотопічна динаміка пропонує єдиний математично-філософський фреймворк, у якому нелінійні PDE роїв дронів, їх колективна поведінка типу murmuration і практична реалізація в Skynet описуються через higher inductive types, cohesive modalities та functorial linearization. Це відкриває шлях до синтетичного контролю, верифікації та масштабування великих автономних роїв.

Висновок

Ми побудували функторіальну факторизацію динамічних систем:

$$\infty\text{-}\mathsf{Gpd} \to \mathsf{Top} \to \mathsf{Meas} \to \mathsf{Markov} \to \mathsf{Hilb}.$$

Ця драбина показує, що:

- гомотопічні структури задають простори станів і траєкторій;
- вимірна структура вводить ймовірність;
- категорії Маркова описують стохастичну динаміку;
- гільбертові простори забезпечують її лінеаризацію та операторну реалізацію.

Функціональний аналіз і квантова механіка постають як природні представлення нижчих рівнів цієї ієрархії. Cohesive homotopy type theory пропонує єдиний синтетичний фреймворк, у якому всі щаблі драбини можуть бути описані одночасно на одному мовному ядрі.

Література

[1] M. Shulman. Modal Homotopy Type Theory.

[2] B. Jurčo, C. Saemann, U. Schreiber, M. Wolf. Higher Structures in M-Theory. Fortsch. Phys. 67 (2019) 1910001, arXiv:1903.02807.

[3] U. Schreiber. Differential cohomology in a cohesive ∞-topos. arXiv:1310.7930.

[4] U. Schreiber, M. Shulman. Quantum Gauge Field Theory in Cohesive Homotopy Type Theory. arXiv:1408.0054.

[5] U. Schreiber. Higher prequantum geometry. arXiv:1601.05956.

[6] H. Haken. Synergetics: An Introduction. Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry and Biology. Springer, 1977.

[7] H. Haken. Advanced Synergetics. Springer, 1983.

[8] L. Schwartz. Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1950–1951.

[9] I. M. Gelfand, G. E. Shilov. Generalized Functions, Vols. 1–5. Academic Press, 1964–1968.

[10] A. N. Kolmogorov. Foundations of the Theory of Probability. Chelsea, 1950.

[11] R. P. Feynman, M. Kac. Interaction of Markov processes and quantum theory.

[12] G. I. Marchuk. Mathematical Models in Environmental Problems. Elsevier, 1986.

[13] S. L. Sobolev. Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. AMS, 1963.

[14] nLab. Cohesive homotopy type theory. `https://ncatlab.org/nlab/show/cohesive+homotopy+type+theory`

[15] nLab. Higher inductive types. `https://ncatlab.org/nlab/show/higher+inductive+type`

[16] nLab. Higher gauge theory. `https://ncatlab.org/nlab/show/higher+gauge+theory`

[17] Skynet: Link32 Tactical Communication Protocol for Drone Swarms. `https://bitedits.github.io/skynet/skynet.pdf`

[18] Groupoid Infinity. Volume IV: PDEs. `https://groupoid.space/books/vol4/pde.pdf`

[19] F. Cucker, S. Smale. Emergent behavior in flocks. IEEE Trans. Autom. Control, 2007.